E S S E C

Option économique

MATHEMATIQUES 2

Vendredi 13 mai 1994 de 14h à 18h

Les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21cm de long x 15cm de large sont autorisées.

Le problème a pour objet l'étude d'une marche aléatoire sur un cube (partie II).
Dans la partie I, on établit quelques résultats matriciels utilisés dans la suite.

PARTIE I

1°) Etude de suites récurrentes linéaires.

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant pour tout entier $n\geq 1$ la relation:

(1) $\quad 9u_{n+3} - 9u_{n+2} - 7u_{n+1} + 7u_n = 0.$

a) Résoudre l'équation $9x^3 - 9x^2 - 7x + 7 = 0$.

b) Déterminer les suites géométriques non nulles $(r^n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1).

c) On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1).

- Exprimer en fonction de u_1, u_2, u_3 trois nombres réels α, β, γ tels que:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \frac{\sqrt{7}}{3}\beta - \frac{\sqrt{7}}{3}\gamma. \\ u_2 = \alpha + \frac{7}{9}\beta + \frac{7}{9}\gamma. \\ u_3 = \alpha + \frac{7\sqrt{7}}{27}\beta - \frac{7\sqrt{7}}{27}\gamma. \end{cases}$$

(On formera $9u_3 - 7u_1$. On donnera les expressions exactes de α, β, γ).

- On associe à la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par:

$$v_n = u_n - \alpha - \beta\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n - \gamma\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n.$$

Etablir qu'elle vérifie (1), puis, en remarquant que $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = 0$. Exprimer enfin u_n en fonction de n.

d) En déduire que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant (1) est l'ensemble des combinaisons linéaires des trois suites obtenues au (b).

2°) Etude des puissances d'une matrice.

On se propose d'étudier la suite $(M^n)_{n\geq 1}$ des puissances de la matrice:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer M^2, M^3, M^4 et en déduire que M vérifie les deux propriétés suivantes:

(2) $9M^4 - 9M^3 - 7M^2 + 7M = 0$.

(3) Les matrices M, M^2, M^3 sont linéairement indépendantes.

b) On se propose d'établir, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'existence et l'unicité de trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que:

(4) $M^n = a_nM + b_nM^2 + c_nM^3$.

- Etablir, pour tout entier $n \geq 1$, l'unicité des réels a_n, b_n, c_n (s'ils existent).
- Déterminer a_n, b_n, c_n pour $n = 1, 2, 3, 4$.
- Etablir par récurrence l'existence de a_n, b_n, c_n dans le cas général.

(On explicitera a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n).

c) Vérifier par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $a_n + b_n + c_n = 1$.

d) En multipliant par M^{n-1} la relation (2), établir que les suites (a_n), (b_n), (c_n) vérifient la relation (1).

e) En appliquant à la suite (b_n) les résultats obtenus à la question 1°, établir pour tout entier $n \geq 1$ la formule suivante:

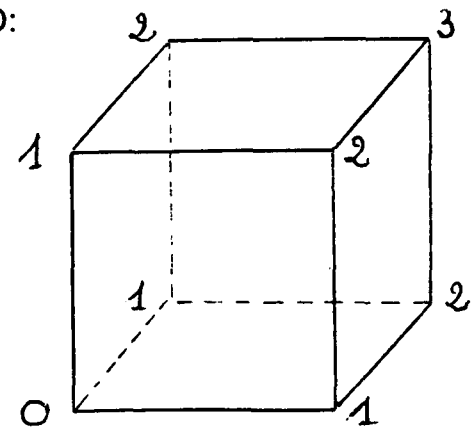
$$b_n = \frac{9}{14}\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^n\right].$$

Déterminer de même les expressions de a_n et c_n.

***

PARTIE II

On considère un cube, dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 selon qu'ils sont situés à une, deux, trois arêtes du sommet O:



On considère dans cette partie le mouvement d'un point P, situé au sommet O à l'instant 0, puis se déplaçant dans l'ensemble des sommets du cube selon les deux règles suivantes:

1) lorsque le point atteint à l'instant n un sommet S du cube autre que le sommet 3, il se situe à l'instant n+1, et de façon équiprobable, sur l'un des trois sommets du cube reliés à S par une arête.
2) lorsque le point atteint le sommet 3 du cube, il y reste définitivement.

Pour tout entier naturel n, on désigne par:
- X_n la variable aléatoire indiquant le numéro du sommet où se trouve le point à l'instant n (en particulier, on a $X_0 = 0$).
- T la variable aléatoire indiquant, s'il existe, l'instant où, pour la première fois, le point atteint le sommet 3.

1°) Lois des variables aléatoires X_n.
Pour tout entier naturel n, on note U_n le vecteur-colonne dont les composantes sont (de haut en bas) les probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
a) Expliciter U_0, U_1, U_2.
b) Exprimer pour i = 0, 1, 2, 3 la probabilité $P(X_{n+1} = i)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $P(X_n = 2)$, $P(X_n = 3)$.
En déduire une matrice M, d'ordre 4, telle que, pour tout entier $n \geq 0$:

$$U_{n+1} = MU_n.$$

c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer U_n en fonction de M^n et U_0, et en déduire l'expression du vecteur U_n et de la loi de X_n en fonction des réels a_n, b_n, c_n définis à la partie I.

2°) Loi de la variable aléatoire T.
a) Montrer que T ne peut prendre avec une probabilité non nulle que des valeurs impaires supérieures ou égales à 3. Donner la probabilité de l'événement "T = 3".
b) Comparer les événements "$X_{2n} = 2$ et $X_{2n+1} = 3$" et "$T = 2n+1$".
En déduire la probabilité de l'événement "$T = 2n+1$".
c) Vérifier alors que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n+1) = 1.$$

d) Calculer enfin l'espérance de la variable aléatoire T.